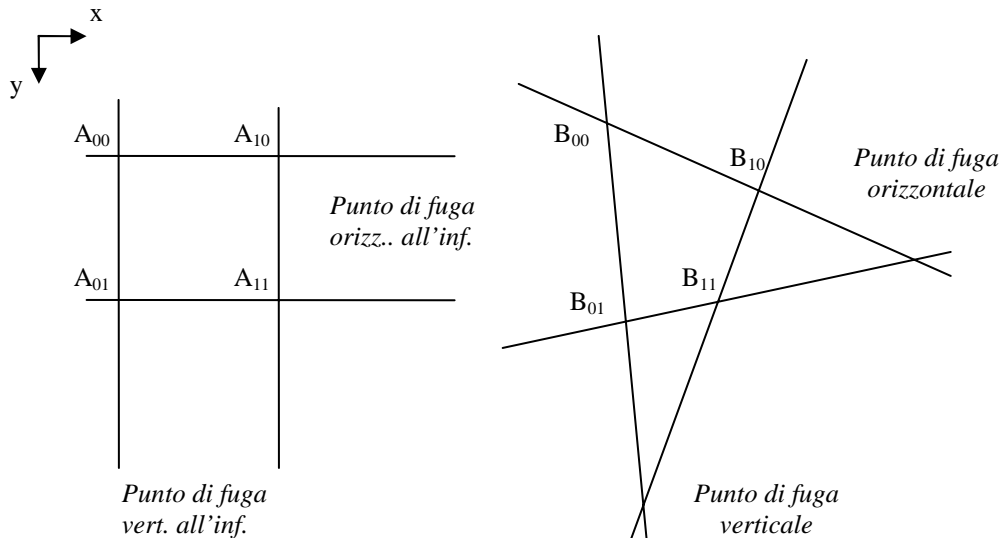


Distorsione prospettica

Problema: costruita una griglia bidimensionale regolare G_r e acquisiti i 4 vertici della griglia deformata G_d sull'immagine si vuole ricavare la matrice di trasformazione che lega tutti i punti delle due griglie.

Soluzione: si tratta di scrivere un sistema di equazioni lineari ricavato dai vincolo che i 4 vertici della G_r ($A_{00}, A_{10}, A_{11}, A_{01}$) siano mappati nei 4 vertici della G_d ($B_{00}, B_{10}, B_{11}, B_{01}$).



La generica equazione che lega un punto generico B_i (in coordinate omogenee) ad un punto generico A_i può esprimersi nella forma:

$$c_i \begin{bmatrix} x_{B_i} \\ y_{B_i} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{A_i} \\ y_{A_i} \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow c_i B_i = H A_i$$

dove c_i è una costante che dipende dalla coppia di punti corrispondenti, H è la matrice di trasformazione da determinare. Tale matrice è determinata a meno di un fattore di scala, quindi è lecito imporre il valore di uno dei suoi elementi (p.e. $h_{33}=1$). Il numero di incognite da determinare è allora 12, dato che 8 sono gli elementi di H non noti e 4 le costanti c_i (una per ogni coppia di corrispondenze A_i - B_i).

A titolo di esempio scriviamo le 3 equazioni che scaturiscono dalla coppia A_{00} - B_{00} :

$$c_{00} x_{B00} = h_{11} x_{A00} + h_{12} y_{A00} + h_{13}$$

$$c_{00} y_{B00} = h_{21} x_{A00} + h_{22} y_{A00} + h_{23}$$

$$c_{00} = h_{31} x_{A00} + h_{32} y_{A00} + 1$$

Allo scopo di scrivere il sistema in forma matriciale $A v = d$ (dove A è la matrice 12×12 dei coefficienti v e d il vettore 12×1 dei termini noti), definiamo il vettore 12×1 delle incognite v :

$$v = [h_{11}, h_{12}, h_{13}, h_{21}, h_{22}, h_{23}, h_{31}, h_{32}, c_{00}, c_{10}, c_{11}, c_{01}]^T$$

Le tre equazioni precedenti allora possono essere riscritte evidenziando i coefficienti:

$$x_{A00} h_{11} + y_{A00} h_{12} + 1 \cdot h_{13} + 0 \cdot h_{21} + 0 \cdot h_{22} + 0 \cdot h_{23} + 0 \cdot h_{31} + 0 \cdot h_{32} - x_{B00} c_{00} + 0 \cdot c_{10} + 0 \cdot c_{11} + 0 \cdot c_{01} = 0$$

$$0 \cdot h_{11} + 0 \cdot h_{12} + 0 \cdot h_{13} + x_{A00} h_{21} + y_{A00} h_{22} + 1 \cdot h_{23} + 0 \cdot h_{31} + 0 \cdot h_{32} - y_{B00} c_{00} + 0 \cdot c_{10} + 0 \cdot c_{11} + 0 \cdot c_{01} = 0$$

$$0 \cdot h_{11} + 0 \cdot h_{12} + 0 \cdot h_{13} + 0 \cdot h_{21} + 0 \cdot h_{22} + 0 \cdot h_{23} + x_{A00} h_{31} + y_{A00} h_{32} - 1 \cdot c_{00} + 0 \cdot c_{10} + 0 \cdot c_{11} + 0 \cdot c_{01} = -1$$

Le prime 3 righe della matrice A e del vettore d saranno:

$$\begin{bmatrix} x_{A00} & y_{A00} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_{B00} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{A00} & y_{A00} & 1 & 0 & 0 & -y_{B00} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{A00} & y_{A00} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} v = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Per risolvere il sistema ad esempio si può utilizzare la SVD (singular value decomposition) ed utilizzare la funzione predefinita in matlab. Se le matrici risultanti dalle decomposizione sono indicate come U , D , V , la soluzione del sistema è data da:

$$v = V D_1 U^T d$$

dove D_1 è la matrice diagonale ricavata da D ponendo

$$d_1(i,i) = 1/d(i,i) \text{ se } d(i,i) \neq 0$$

altrimenti $d_1(i,i) = 0$

NOTA 1

Per limitare gli errori di approssimazione numerica è opportuno normalizzare le coppie di corrispondenze in modo che abbiano coordinate con valore medio nullo e comprese tra -1 e 1.

Per esempio se voglio normalizzare le coordinate dei punti B_{00}, \dots, B_{01} , si calcolano le medie $mean_x_B$ e $mean_y_B$ ed i valori massimi max_x_B e max_y_B e si utilizza la seguente matrice di trasformazione T_B :

$$T_B = \begin{bmatrix} \frac{1}{max_x_B} & 0 & -\frac{mean_x_B}{max_x_B} \\ 0 & \frac{1}{max_y_B} & -\frac{mean_y_B}{max_y_B} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Le nuove coordinate normalizzate sono date da

$$B_{Ni} = T_B B_i$$

Utilizzando le coordinate normalizzate delle corrispondenze, si calcola una H_N dalla quale si ricava H . Infatti se si risolve il sistema determinato dalle equazioni

$$c_{Ni} B_{Ni} = H_N A_{Ni}$$

sostituendo $B_{Ni} = T_B B_i$ e $A_{Ni} = T_A A_i$ si ottiene

$$c_{Ni} T_B B_i = H_N T_A A_i \quad \text{ovvero} \quad c_{Ni} B_i = (T_B)^{-1} H_N T_A A_i$$

$$\text{quindi } H = (T_B)^{-1} H_N T_A$$

NOTA 2

Per chi non volesse implementare in Matlab quanto riportato nella descrizione precedente si può utilizzare la funzione dell' *image processing toolbox* `cp2tform` come nell'esempio seguente:

```
B=[281 124; 360 119; 354 276; 276 270];  
A=[0 0; 1 0; 1 1; 0 1];  
tform=cp2tform(A,B,'projective');  
H=(tform.tdata.Tinv)'
```