SEGNALI A TEMPO DISCRETO

Impulso e altri segnali canonici discreti

Trasformata Zeta

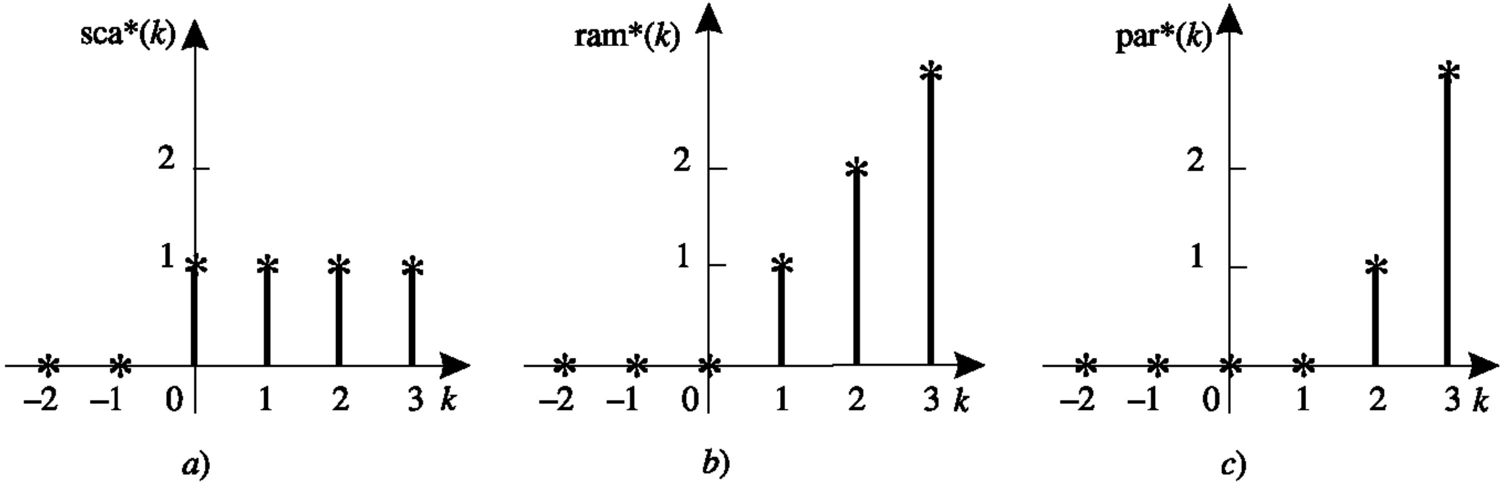
IMPULSO E ALTRI SEGNALI CANONICI DISCRETI

- Segnali canonici discreti

$$\mathrm{sca}^*(k) = \begin{cases} 0 & k < 0 \\ 1 & k \geq 0 \end{cases} \qquad \text{(scalino)}$$

$$\mathrm{ram}^*(k) = \begin{cases} 0 & k < 0 \\ k & k \geq 0 \end{cases} \qquad \text{(rampa)}$$

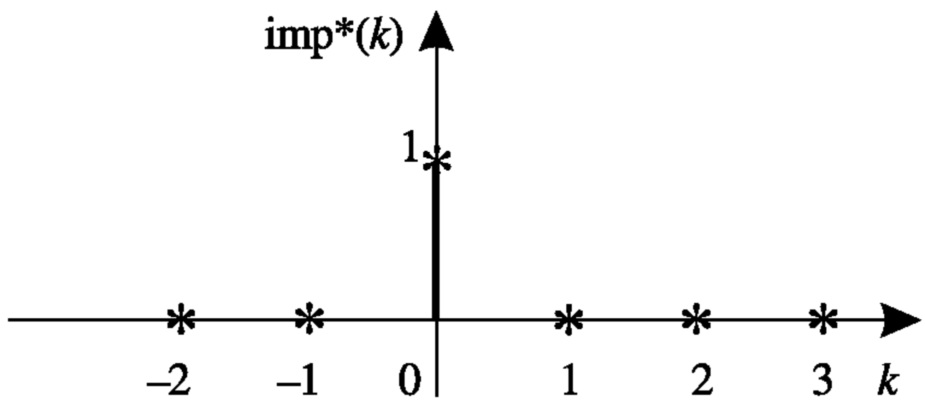
$$\mathrm{par}^*(k) = \begin{cases} 0 & k < 0 \\ k(k-1)/2 & k \geq 0 \end{cases} \qquad \text{(parabola)}$$



$$\sum_{i=-\infty}^{k-1} \mathrm{sca}^*(i) = \mathrm{ram}^*(k) \qquad \sum_{i=-\infty}^{k-1} \mathrm{ram}^*(i) = \mathrm{par}^*(k)$$

- Impulso (simbolo di Kronecker)

$$\mathrm{imp}^*(k) = \begin{cases} 0 & k \neq 0 \\ 1 & k = 0 \end{cases}$$



$$\sum_{i=-\infty}^{k} \mathrm{imp}^*(i) = \mathrm{sca}^*(k)$$

TRASFORMATA ZETA

Generalità

- Funzione complessa f di variabile intera k, $z = \rho e^{j\theta} \in C$:

$$F(z) = \mathcal{Z}[f(k)] = \sum_{k=0}^{+\infty} f(k) z^{-k}$$

  ⋆ $\exists z$: convergenza serie $\Rightarrow \bar{\rho}$: raggio di convergenza ($F(z)$ esiste all'esterno del cerchio $\rho > \bar{\rho}$)

- Trasformata razionale

$$F(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$$

  - $\star$ radici di $N(z) = 0$: zeri
  - $\star$ radici di $D(z) = 0$: poli (f reale: $\bar{\rho} = \max(\rho_i)$)

- Formula di antitrasformazione ($\rho > \bar{\rho}$)

$$f(k) = \mathcal{Z}^{-1}[F(z)] = \frac{1}{2\pi j} \oint F(z) z^{k-1} dz$$

  - $\star$ $f(k) = 0,\, k < 0 \Rightarrow$ corrispondenza biunivoca

- Trasformata dell'impulso

$$\mathcal{Z}[\mathrm{imp}^*(k)] = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{imp}^*(k) z^{-k} = 1$$

- Trasformata dello scalino ($\bar{\rho} = 1$)

$$\mathcal{Z}[\mathrm{sca}^*(k)] = \sum_{k=0}^{+\infty} z^{-k} = \frac{z}{z-1}$$

Proprietà principali

- Linearità

$$\mathcal{Z}[\alpha f(k) + \beta g(k)] = \alpha F(z) + \beta G(z)$$

- Ritardo

$$\mathcal{Z}\left[\hat{f}(k)\right] = \mathcal{Z}[f(k-1)] = \frac{1}{z}F(z)$$

- Anticipo

$$\mathcal{Z}\left[\hat{f}(k)\right] = \mathcal{Z}[f(k+1)] = zF(z) - zf(0)$$

$$\mathcal{Z}\left[\hat{f}(k)\right] = \mathcal{Z}[f(k+m)] = z^m F(z) - z^m \sum_{k=0}^{m-1} f(k) z^{-k}$$

- Prodotto per un esponenziale

$$\mathcal{Z}\left[\alpha^k f(k)\right] = F\left(\frac{z}{\alpha}\right)$$

⋆ trasformata dell'esponenziale ($\bar{\rho} = |\alpha|$)

$$\mathcal{Z}\left[\alpha^k \mathrm{sca}^*(k)\right] = \frac{z}{z-\alpha}$$

- Derivazione nel dominio della variabile complessa

$$\mathcal{Z}[kf(k)] = -z\frac{dF(z)}{dz}$$

  - ⋆ trasformata della rampa

$$\mathcal{Z}[\mathrm{ram}^*(k)] = -z\frac{d\left(\dfrac{z}{z-1}\right)}{dz} = \frac{z}{(z-1)^2}$$

⋆ trasformata della parabola

$$\mathrm{par}^*(k) = 0.5[k\mathrm{ram}^*(k) - \mathrm{ram}^*(k)]$$

$$\mathcal{Z}[k\mathrm{ram}^*(k)] = -z\frac{d\left(\dfrac{z}{(z-1)^2}\right)}{dz} = \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{Z}[\mathrm{par}^*(k)] = \frac{z}{(z-1)^3}$$

- Convoluzione nel dominio del tempo
  - ⋆ prodotto di convoluzione

$$f_1(k) \star f_2(k) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} f_1(i) f_2(k-i) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} f_1(k-l) f_2(l)$$

$$= \sum_{i=0}^{+\infty} f_1(i) f_2(k-i) = \sum_{i=0}^{+\infty} f_1(k-l) f_2(l)$$

$$= f_2(k) \star f_1(k)$$

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{Z}[f_1(k) \star f_2(k)] = F_1(z) F_2(z)$$

$\star \; f_1(k) = \alpha^k \mathrm{sca}^*(k),\, f_2(k) = \mathrm{sca}^*(k)$

$$\mathcal{Z}[f_1(k) \star f_2(k)] = \frac{z^2}{(z-\alpha)(z-1)}$$

- Teorema del valore iniziale

$$f(0) = \lim_{z \to \infty} F(z)$$

- Teorema del valore finale (f ha trasformata razionale F con poli in $z = 1$ o con modulo minore di 1)

$$\lim_{k\to\infty} f(k) = \lim_{z\to 1} (z-1)F(z)$$

$\star$ $f(k) = a^k \mathrm{sca}^*(k)$

$$\left[a^k \mathrm{sca}^*(k)\right]\Big|_{k=0} = \lim_{z\to\infty} \frac{z}{z-a} = 1$$

$$\lim_{k\to\infty} a^k \mathrm{sca}^*(k) = \lim_{z\to 1} (z-1)\frac{z}{z-a} = \begin{cases} 0 & -1 < a < 1 \\ 1 & a = 1 \end{cases}$$

- Tabella di trasformate

$f(t)$	$F(z)$
$\mathrm{imp}^*(k)$	1
$\mathrm{sca}^*(k)$	$\dfrac{z}{z-1}$
$\mathrm{ram}^*(k)$	$\dfrac{z}{(z-1)^2}$
$\mathrm{par}^*(k)$	$\dfrac{z}{(z-1)^3}$
$a^k\mathrm{sca}^*(k)$	$\dfrac{z}{z-a}$
$a^k\mathrm{ram}^*(k)$	$\dfrac{az}{(z-a)^2}$
$\sin(\theta k)\mathrm{sca}^*(k)$	$\dfrac{z\sin(\theta)}{z^2-2\cos(\theta)z+1}$
$\cos(\theta k)\mathrm{sca}^*(k)$	$\dfrac{z[z-\cos(\theta)]}{z^2-2\cos(\theta)z+1}$

Sviluppo di Heaviside e lunga divisione

- Antitrasformazione di funzione razionale

$$F(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$$

  ⋆ grado di $D(z)$ maggiore o uguale al grado di $N(z)$

  ⋆ $N(z)$ e $D(z)$ a coefficienti reali

- Poli distinti e non nulli

$$zD(z) = \prod_{i=0}^{n} (z + p_i) \qquad p_h \neq p_j \,, h \neq j$$

$$\frac{N(z)}{\prod_{i=0}^{n} (z + p_i)} \equiv \sum_{i=0}^{n} \frac{P_i}{z + p_i}$$

$\star$ calcolo dei residui

$$P_i = \frac{N(-p_i)}{\prod_{j=0, j\neq i}^{n}(p_j - p_i)} = \frac{N(-p_i)}{\left.\dfrac{dzD(z)}{dz}\right|_{z=-p_i}} = \left.\left[(z+p_i)\frac{F(z)}{z}\right]\right|_{z=-p_i}$$

$$\Downarrow$$

$$f(k) = \mathcal{Z}^{-1}[F(z)] = \mathcal{Z}^{-1}\left[P_0 + \sum_{i=1}^{n}\frac{P_i z}{z+p_i}\right]$$

$$= P_0 \mathrm{imp}^*(k) + \left[\sum_{i=1}^{n} P_i(-p_i)^k\right]\mathrm{sca}^*(k)$$

- Esempio

$$F(z) = \frac{z-10}{(z+2)(z+5)}$$

$$\frac{z-10}{z(z+2)(z+5)} \equiv \frac{P_0}{z} + \frac{P_1}{z+2} + \frac{P_2}{z+5}$$

$$P_0 = \frac{-10}{2\cdot 5} \qquad P_1 = \frac{-2-10}{-2(-2+5)} = 2 \qquad P_2 = \frac{-5-10}{-5(-5+2)} = -1$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} f(k) &= \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z-10}{(z+2)(z+5)}\right] \\ &= -\mathrm{imp}^*(k) + \left[2(-2)^k - (-5)^k\right]\mathrm{sca}^*(k) \end{aligned}$$

- Poli complessi coniugati e/o multipli … cfr. trasformata di Laplace

- Metodo della lunga divisione

  ⋆ rinuncia all'antitrasformata di $F(z)$ in forma chiusa: valori assunti da $f(k)$ nei singoli istanti di tempo ottenuti per divisione N/D

$$
\begin{aligned}
F(z) &= \frac{z-10}{(z+2)(z+5)} \\
&= z^{-1} - 17z^{-2} + 109z^{-3} - 593z^{-4} + \ldots
\end{aligned}
$$

$$
f(0)=0 \quad f(1)=1 \quad f(2)=-17 \quad f(3)=109 \quad f(4)=-593
$$