Esercizio 1.1

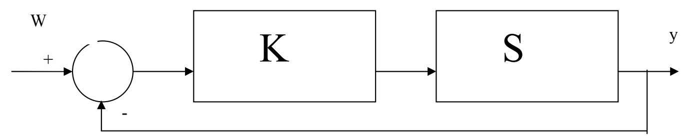
Dato il sistema dinamico a tempo continuo S:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t)$$

1) studiare la stabilità interna del sistema;
2) dire se è possibile individuare un valore iniziale $\boldsymbol{x}(0) \neq \boldsymbol{0}$ del vettore di stato affinché l'evoluzione libera dello stato tenda a zero per t che tende ad infinito.

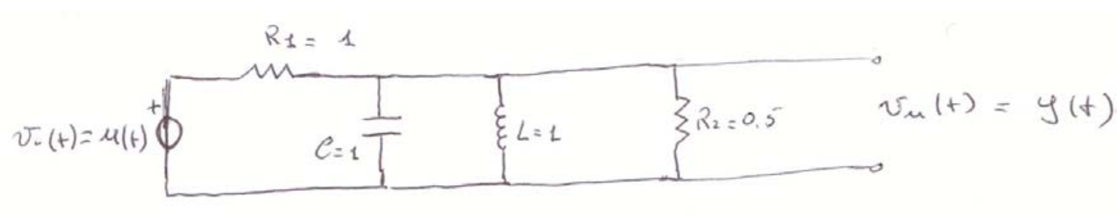
In seguito, assumendo $h_1 = 0$ e $h_2 = 1$ e considerando il sistema retroazionato riportato in figura:



3) determinare il campo dei valori di k che rende asintoticamente stabile internamente il sistema a catena chiusa

Esercizio 1.2

Dato il circuito elettrico di figura:



1) verificare che, scegliendo $\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} i_L(t) \\ v_C(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$, la rappresentazione interna del sistema dinamico a tempo continuo assume la forma:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t)$$

2) determinare gli autovalori e i modi del sistema dinamico;
3) verificare se il sistema è in forma minima;
4) determinare la risposta forzata dell'uscita corrispondente ad un ingresso a scalino unitario applicato al tempo $t = 0$.

Esercizio 1.3

Dato il sistema dinamico a tempo continuo S:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t)$$

1) verificare se il sistema è in forma minima;
2) valutare la stabilità interna e la stabilità esterna;
3) determinare la risposta all'impulso;
4) determinare la risposta forzata dell'uscita corrispondente ad un ingresso a scalino unitario applicato al tempo $t = 0$.

Esercizio 1.4

Dato il sistema dinamico a tempo continuo S caratterizzato dal seguente modello ingresso-uscita:

$$\dddot{y}(t) + 5\ddot{y}(t) + 8\dot{y}(t) + 4y(t) = \ddot{u}(t) + u(t)$$

1) determinare la funzione di trasferimento;
2) nell'ipotesi in cui $\beta_2 = 0$, costruire una realizzazione minima in forma canonica di raggiungibilità e discutere il significato fisico delle variabili di stato associate alla forma canonica;
3) considerando $\beta_2 = 1$ costruire una realizzazione minima in forma canonica di osservabilità;
4) determinare il valore di regime della risposta forzata dell'uscita corrispondente ad un ingresso a scalino unitario applicato al tempo $t = 0$.
5) calcolare la risposta all'impulso.

Esercizio 1.5

Sia dato il sistema lineare, stazionario e a tempo discreto:

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 0.65 & -0.35 & 0.5 \\ 0.15 & 1.15 & -0.5 \\ 0.15 & -0.35 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(k)$$

1) studiare la stabilità interna;
2) determinare il movimento libero dello stato corrispondente allo stato iniziale $\boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}'$;
3) determinare, se esiste, un valore di $\boldsymbol{x}(0)$ che dia luogo a un movimento libero dello stato limitato;
4) verificare se il sistema è in forma minima;

5) determinare i modi osservabili;
6) determinare un valore dello stato iniziale osservabile dall'uscita;
7) determinare i modi raggiungibili;
8) determinare la sequenza minima di ingresso che consente di raggiungere lo stato $\tilde{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 5.3 & 0.3 & 0.3 \end{bmatrix}'$;
9) dire se il sistema è stabile esternamente;
10) determinare la funzione di trasferimento e dalla sua analisi verificare la congruenza con i risultati ottenuti rispondendo alle domande precedenti.

Soluzioni

Esercizio 1.1

1)

$\det(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = s^2 - 6s + 5$; $\quad s_1 = 1, \quad s_2 = 5.$ Sistema instabile.

2)
non è possibile perché entrambi i modi tendono ad infinito per t che tende ad infinito.

3)

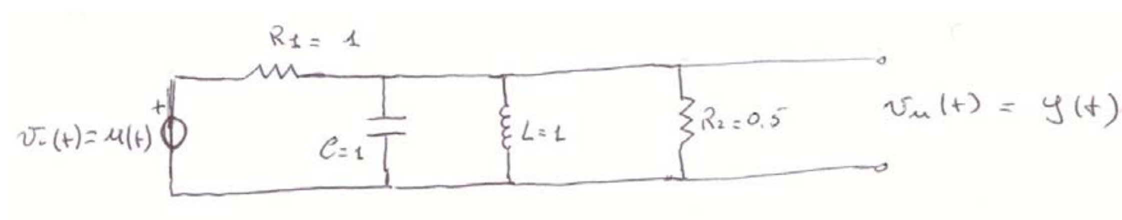
$$\boldsymbol{A_w} = \boldsymbol{A} - k\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 3 & (1-k) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{b_w} = k\,\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ k \end{bmatrix}$$

$$\det(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_w) = s^2 + (k-6)s + 5(1-k)$$

non esistono valori di *k* che consentono di ottenere entrambi gli autovalori con parte reale negativa. A tale risultato si può pervenire osservando la struttura della matrice $\boldsymbol{A_w}$ che ha un autovalore pari a +5 quale che sia il valore di *k*.

Esercizio 1.2



1)

dall'analisi del circuito elettrico è possibile ricavare le seguenti equazioni differenziali:

$$L\frac{i_L(t)}{dt} = v_C(t)$$

$$C\frac{v_C(t)}{dt} = -i_L(t) - \frac{v_C(t)}{R_2} + \frac{u(t) - v_C(t)}{R_2}$$

considerando come variabili di stato:

$$\boldsymbol{x}(t)=\begin{bmatrix} i_L(t) \\ v_C(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix},$$

si ottiene la seguente rappresentazione interna:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{L} \\ -\dfrac{1}{C} & -\dfrac{1}{C}\left(\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}\right) \end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)+\begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{CR_1} \end{bmatrix}u(t)=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)+\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u(t)$$

$$y(t)=\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)$$

2)

il polinomio caratteristico risulta:

$\det(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=s^2+3s+1$ e i corrispondenti autovalori sono:

$s_1=-2.62 \qquad s_2=-0.38$

3)

La matrice di raggiungibilità è data da

$\boldsymbol{M}_r=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ rango ($\boldsymbol{M}_r$) = 2 il sistema è completamente raggiungibile.

La matrice di osservabilità è data da

$\boldsymbol{M}_o=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ rango ($\boldsymbol{M}_o$) = 2 il sistema è completamente osservabile.

Il sistema è in forma minima.

4)

La funzione di trasferimento del sistema è data da:

$$G(s)=\boldsymbol{c}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{b}=\frac{s}{s^2+3s+1},$$

la trasformata di Laplace della risposta forzata dell'uscita corrispondente ad un ingresso a scalino unitario applicato al tempo $t=0$ è data da:

$$Y_s(s)=\frac{1}{s}G(s)=\frac{1}{s^2+3s+1}=\frac{1}{(s+2.62)(s+0.38)}=\frac{P_1}{(s+2.62)}+\frac{P_2}{(s+0.38)}$$

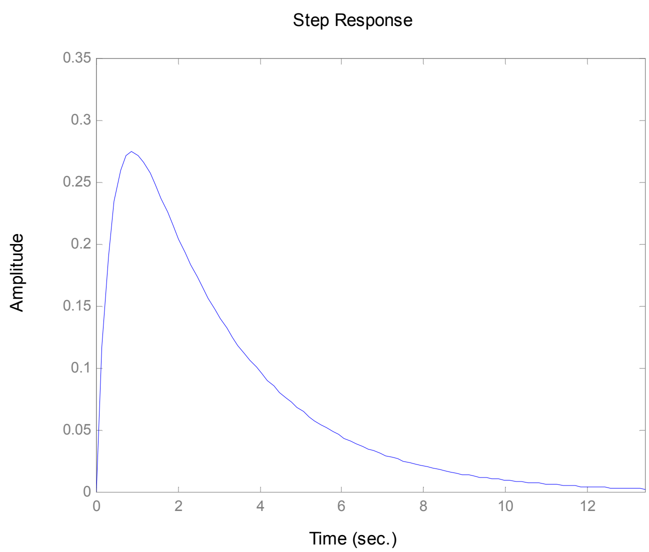
$$P_1 = \left[(s+2.62)Y_s(s)\right]_{s=-2.62} = \left[(s+2.62)\frac{1}{(s+2.62)(s+0.38)}\right]_{s=-2.62} = -0.45$$

$$P_2 = \left[(s+0.38)Y_s(s)\right]_{s=-0.38} = \left[(s+0.38)\frac{1}{(s+2.62)(s+0.38)}\right]_{s=-0.38} = 0.45$$

Antistrasformando:

$$y_s(t) = L^{-1}\left[Y_s(s)\right] = \left(-0.45\,e^{-2.62\,t} + 0.45\,e^{-0.38\,t}\right)\mathrm{sca}(t).$$

L'andamento della risposta alla scalino unitario è riportato nella figura seguente:



Esercizio 1.3

1)

La matrice di raggiungibilità è data da

$$\boldsymbol{M_r} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ rango ($\boldsymbol{M_r}$) = 2 il sistema non è completamente raggiungibile, quindi non è in forma minima.

La matrice di osservabilità è data da

$$\boldsymbol{M_o} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & -4 & 8 \end{bmatrix}$$ rango ($\boldsymbol{M_o}$) = 3 il sistema è completamente osservabile.

2)

il polinomio caratteristico risulta:

$\det(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = s^3 + 5s^2 + 7s + 2$ e i corrispondenti autovalori sono:

$s_1 = -2.62 \quad s_2 = -0.38 \quad s_3 = -2$, il sistema è asintoticamente stabile internamente e quindi è anche stabile esternamente.

3)

La funzione di trasferimento del sistema è data da:

$G(s) = \boldsymbol{c}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{b} = -\dfrac{1}{s^2 + 3s + 1}$, per determinare la risposta all'impulso si consideri lo sviluppo in frazioni parziali:

$$G(s) = -\frac{1}{(s+2.62)(s+0.38)} = \frac{P_1}{(s+2.62)} + \frac{P_2}{(s+0.38)}$$

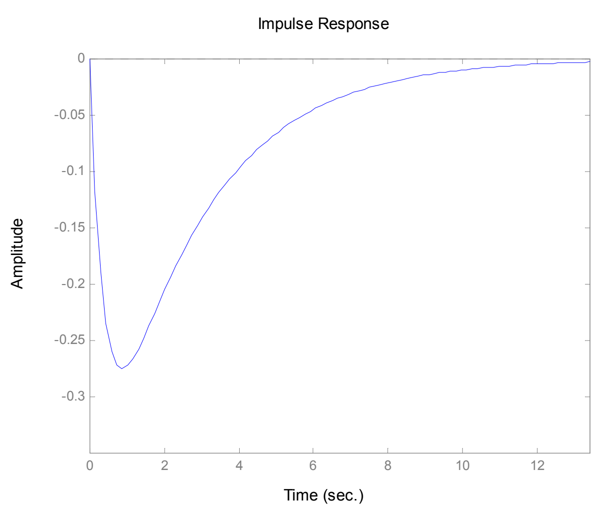
$$P_1 = \left[(s+2.62)G(s)\right]_{s=-2.62} = \left[(s+2.62)\frac{-1}{(s+2.62)(s+0.38)}\right]_{s=-2.62} = 0.45$$

$$P_2 = \left[(s+0.38)G(s)\right]_{s=-0.38} = \left[(s+0.38)\frac{-1}{(s+2.62)(s+0.38)}\right]_{s=-0.38} = -0.45$$

Antistrasformando, si ottiene la risposta all'impulo

$$g_y(t) = L^{-1}\left[G(S)\right] = \left(0.45\,e^{-2.62\,t} - 0.45\,e^{-0.38\,t}\right)\mathrm{sca}(\mathrm{t})$$

L'andamento della risposta all'impulso è riportato nella figura seguente:



4)

la trasformata di Laplace della risposta forzata dell'uscita corrispondente ad un ingresso a scalino unitario applicato al tempo $t = 0$ è data da:

$$Y_s(s) = \frac{1}{s}G(s) = -\frac{1}{s(s^2+3s+1)} = \frac{P_0}{s} + \frac{P_1}{(s+2.62)} + \frac{P_2}{(s+0.38)}$$

$$P_0 = [sY_s(s)]_{s=0} = \left[s\frac{-1}{s(s+2.62)(s+0.38)}\right]_{s=0} = -1$$

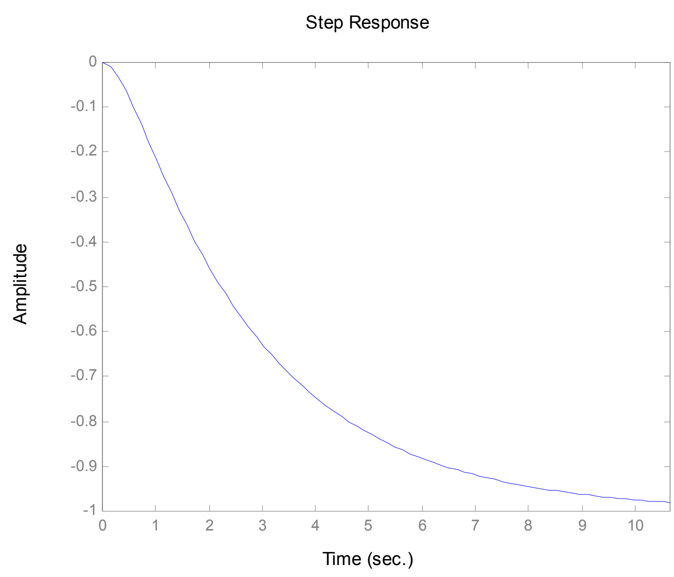
$$P_2 = [(s+2.62)Y_s(s)]_{s=-2.62} = \left[(s+2.62)\frac{1}{s(s+2.62)(s+0.38)}\right]_{s=-2.62} = -0.17$$

$$P_2 = [(s+0.38)Y_s(s)]_{s=-0.38} = \left[(s+0.38)\frac{1}{s(s+2.62)(s+0.38)}\right]_{s=-0.38} = 1.17$$

Antistrasformando:

$$y_s(t) = L^{-1}[Y_s(s)] = -\left(1 + 0.17\,e^{-2.62\,t} - 1.17\,e^{-0.38\,t}\right)\mathrm{sca}(\mathrm{t}).$$

L'andamento della risposta alla scalino unitario è riportato nella figura seguente:



Esercizio 1.4

1)

$$G(s)=\frac{s^2+1}{s^3+5s^2+8s+4}$$

2)
Realizzazione minima in forma canonica di raggiungibilità:

$\beta_n = 0 = \hat{\beta}_n; \quad \hat{\beta}_i = \beta_i - \alpha_i \hat{\beta}_n = \beta_i \qquad i = 0, 1, 2.$

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -8 & -5 \end{bmatrix}; \qquad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \qquad \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 & \hat{\beta}_1 & \hat{\beta}_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

nel caso in cui $\beta_2 = 0$, nell'equazione differenziale che definisce il modello ingresso-uscita non compaiono derivate del segnale di ingresso, in tal caso le componenti del vettore di stato sono definite come:

$$x_i(t)=\frac{1}{\beta_0}\frac{d^{i-1}y(t)}{dt^{i-1}} \quad \text{cioè} \quad x_1(t)=y(t),\ x_2(t)=\dot{y}(t) \quad x_3(t)=\ddot{y}(t)$$

3)
Realizzazione minima in forma canonica di osservabilità:

$\beta_n = 0 = \hat{\beta}_n; \quad \hat{\beta}_i = \beta_i - \alpha_i \hat{\beta}_n = \beta_i \qquad i = 0, 1, 2.$

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & -\alpha_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & -5 \end{bmatrix}; \qquad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \qquad \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

4)

non sono presenti zeri o poli nell'origine quindi: $y_s(\infty)=G(0)=\text{guadagno statico}=\mu=0.25.$

5)

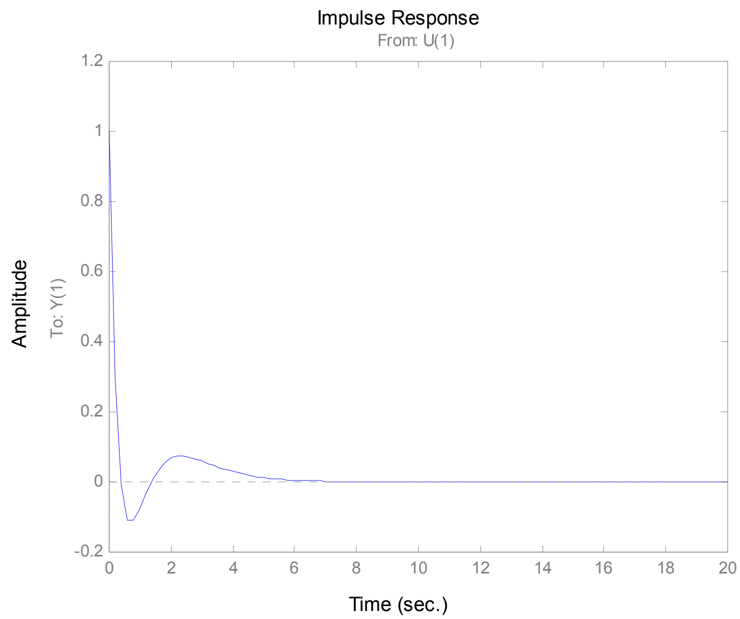
$$G(s)=\frac{s^2+1}{s^3+5s^2+8s+4}=\frac{s^2+1}{(s+1)(s+2)^2}=\frac{P_1}{s+1}+\frac{P_{21}}{(s+2)}+\frac{P_{22}}{(s+2)^2}=\frac{2}{s+1}-\frac{1}{(s+2)}-\frac{5}{(s+2)^2}$$

$$P_1=\left[(s+1)G(s)\right]_{s=-1}=\left[(s+1)\frac{s^2+1}{(s+1)(s+2)^2}\right]_{s=-1}=2$$

$$P_{21} = \left[\frac{d}{ds}(s+2)^2 G(s)\right]_{s=-2} = \left[\frac{d}{ds}(s+2)^2 \frac{s^2+1}{(s+1)(s+2)^2}\right]_{s=-2} = \left[\frac{s^2+2s-1}{(s+1)^2}\right]_{s=-2} = -1$$

$$P_{22} = \left[(s+2)^2 G(s)\right]_{s=-2} = \left[(s+2)^2 \frac{s^2+1}{(s+1)(s+2)^2}\right]_{s=-2} = -5$$

$$g_y(t) = L^{-1}[G(S)] = 2\,e^{-t} - e^{-2t} - 5\,t\,e^{-2t}$$



Esercizio 1.5

1) studiare la stabilità interna:

il polinomio caratteristico risulta:

$\det(z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = z^3 + 5z^2 + 7z + 2$ e i corrispondenti autovalori sono:

$z_1 = 1.5 \quad z_2 = 0.8 \quad z_3 = 0.5, \rightarrow$ il sistema è instabile internamente.

2) determinare il movimento libero dello stato corrispondente allo stato iniziale $\boldsymbol{x}(0) = [1 \quad 1 \quad 3]'$:

Si considerano i tre autovettori:

$$z_1 = 1.5 \rightarrow \quad \boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad z_2 = 0.8 \rightarrow \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad z_3 = 0.5 \rightarrow \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

la matrice degli autovettori allora è data da:

$$\boldsymbol{T_D}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \rightarrow \qquad \boldsymbol{T_D} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

e il movimento libero dello stato è dato da:

$\boldsymbol{x_l}(k) = \boldsymbol{T_D}^{-1} diag\{z_1^k, z_2^k, z_3^k\} \boldsymbol{T_D}\ \boldsymbol{x}(0)$; considerando lo stato iniziale $\boldsymbol{x}(0) = [1 \quad 1 \quad 3]'$ si ottiene:

$$\begin{cases} x_{1l}(k) = 1.5^k + 0.8^k - 0.5^k \\ x_{2l}(k) = -1.5^k + 0.8^k + 0.5^k \\ x_{3l}(k) = 1.5^k + 0.8^k + 0.5^k \end{cases}$$

3) determinare, se esiste, un valore di $\boldsymbol{x}(0)$ che dia luogo a un movimento libero dello stato limitato;

affinché il movimento libero dello stato sia limitato, occorre che lo stato iniziale non abbia componenti lungo l'autovettore associato all'autovalore instabile; quindi, un qualsiasi stato iniziale ottenuto come combinazione lineare di v_2 e v_3 darà luogo ad un movimento libero dello stato limitato, ad esempio

$\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v_3} = [0 \quad 2 \quad 2]'$ dà luogo a :

$$\begin{cases} x_{1l}(k) = 0.8^k - 0.5^k \\ x_{2l}(k) = +0.8^k + 0.5^k \\ x_{3l}(k) = +0.8^k + 0.5^k \end{cases}$$

4) verificare se il sistema è in forma minima:

La matrice di raggiungibilità è data da :

$$\boldsymbol{M_r} = \begin{bmatrix} 1 & 0.65 & 0.445 \\ 0 & 0.15 & 0.195 \\ 0 & 0.15 & 0.195 \end{bmatrix}$$

rango ($\boldsymbol{M_r}$) = 2 il sistema non è completamente raggiungibile, quindi non è in forma minima.

La matrice di osservabilità è data da :

$$\boldsymbol{M_o} = \begin{bmatrix} 1 & 0.8 & 0.64 \\ 1 & 0.8 & 0.64 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

rango ($\boldsymbol{M_o}$) = 1 il sistema non è completamente osservabile.

5) determinare i modi osservabili:

se si considera l'espressione del movimento libero dell'uscita:

$$y_l(k) = \boldsymbol{c}\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{D}}^{-1} diag\{z_1^k, z_2^k, z_3^k\}\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{D}}\ \boldsymbol{x}(0)$$

i modi osservabili sono quelli in corrispondenza ai quali gli elementi del vettore $\boldsymbol{c}\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{D}}^{-1}$ sono diversi da zero; nel caso specifico

$\boldsymbol{c}\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{D}}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ quindi l'unico modo osservabile è $z_2 = 0.8$.

6) determinare un valore dello stato iniziale osservabile dall'uscita:

poiché il rango della matrice di osservabilità è pari a 1, qualsiasi valore dello stato che sia proporzionale ad una delle colonne della matrice di osservabiltà sarà osservabile.

7) determinare i modi raggiungibili:

la matrice di trasformazione si ottiene a partire dalla matrice di raggiungibilità selezionando le due colonne linearmente indipendenti e aggiungendone una terza che la renda non singolare:

$$\boldsymbol{T}_r^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0.65 & 0 \\ 0 & 0.15 & 0 \\ 0 & 0.15 & 1 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{T}_r = \begin{bmatrix} 1 & -4.33 & 0 \\ 0 & 6.67 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

la matrice dinamica in forma canonica di raggiungibilità risulta:

$$\hat{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{T}_r\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{T}_r^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -0.4 & 2.67 \\ 1 & 1.3 & -3.33 \\ 0 & 0 & 1.5 \end{bmatrix}$$

da cui si evince che l'autovalore non raggiungibile è $z_1 = 1.5$. Per verifica gli autovalori della parte raggiungile sono quelli della matrice:

$$\hat{\boldsymbol{A}}_a = \begin{bmatrix} 0 & -0.4 \\ 1 & 1.3 \end{bmatrix} \quad \text{cioè} \quad z_2 = 0.8 \qquad z_3 = 0.5$$

8) determinare la sequenza minima di ingresso che consente di raggiungere lo stato $\tilde{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 5.3 & 0.3 & 0.3 \end{bmatrix}'$:

si ottiene come soluzione del sistema:

$$u(1)\boldsymbol{b}+u(0)\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}=u(1)\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+u(0)\begin{bmatrix}0.65\\0.15\\0.15\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5.3\\0.3\\0.3\end{bmatrix} \quad \rightarrow \; u(1)=4; \;\; u(0)=2.$$

9) dire se il sistema è stabile esternamente:

l'unico autovalore della parte raggiungibile e osservabile del sistema è $z_2 = 0.8$, quindi il sistema è stabile esternamente.

10) determinare la funzione di trasferimento e dalla sua analisi verificare la congruenza con i risultati ottenuti rispondendo alle domande precedenti:

$$G(z)=\boldsymbol{c}(z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{b}=\frac{1}{z-0.8}.$$