Teoria dei Sistemi - Prova finale - 17 Aprile 2003
Compito n.1

Quesito n.1
Sia dato il sistema lineare, stazionario e a tempo discreto:

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\begin{bmatrix}1.5 & 1.1 & 0\\ 1.1 & 1.5 & 0\\ 0 & 0 & 0.5\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(k)+\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 0\end{bmatrix}u(k); \qquad y(k)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(k)$$

1) Determinare gli autovalori della matrice dinamica e studiare la stabilità interna:

$z_1 =$ $z_2 =$ $z_3 =$ - asintoticamente stabile internamente (si -- no)

2) determinare il movimento libero dello stato corrispondente allo stato iniziale $\boldsymbol{x}(0)=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\end{bmatrix}'$:

$$\begin{cases} x_{1l}(k)= \\ x_{2l}(k)= \\ x_{3l}(k)= \end{cases}$$

3) verificare se il sistema è in forma minima:

forma minima (si -- no)
Motivazione sintetica ____

____

4) determinare gli autovalori della parte raggiungibile e della parte non raggiungibile (ragg.- nragg):

z_1 : z_2 : z_3 :

Motivazione sintetica ____

____

5) determinare, se esiste, una sequenza di ingresso che consenta di raggiungere lo stato $\tilde{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}3.3 & 4.5 & 0\end{bmatrix}'$:

$u(0)=$ $u(1)=$ ………

6) dire se il sistema è stabile esternamente:

stabile esternamente (si -- no)
Motivazione sintetica ____

____

7) determinare la funzione di trasferimento:

$G(z)=$

Quesito n.2
Sia dato il sistema lineare, stazionario e a tempo continuo descritto dalla seguente funzione di trasferimento:

$$G(s)=\frac{9}{s^2+3s+2}$$

1) studiare la stabilità esterna:

stabile esternamente (si -- no)
Motivazione sintetica ____

____

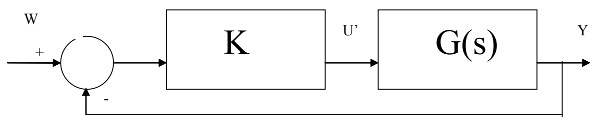
2) determinare il valore di regime della risposta forzata dell'uscita corrispondente ad un ingresso a scalino unitario applicato al tempo $t = 5$:

$y_s(\infty) =$

3) determinare la risposta all'impulso applicato al tempo $t = 5$:

$g_y(t) =$

Infine, considerando il sistema retroazionato riportato in figura:



4) determinare il campo dei valori di K che rende stabile esternamente il sistema con ingresso W e uscita Y: (suggerimento: U'=K(W-Y))

……………..

Soluzione

Quesito n.1

1) Determinare gli autovalori della matrice dinamica e studiare la stabilità interna:

$$\det(z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = (z-0.5)\left[(z-1.5)^2 - (1.1)^2\right] = (z-0.5)\left(z^2 - 3z + 1.04\right) = 0\,;$$

$z_1 = 0.4, \quad z_2 = 2.6, \quad z_3 = 0.5$. Sistema instabile.

2) determinare il movimento libero dello stato corrispondente allo stato iniziale $\boldsymbol{x}(0) = [1 \quad -1 \quad 1]'$:

Si considerano i tre autovettori:

$$z_1 = 0.4 \rightarrow \quad \boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad z_2 = 2.6 \rightarrow \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad z_3 = 0.5 \rightarrow \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

la matrice degli autovettori allora è data da:

$$T_D^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \rightarrow \qquad T_D = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e il movimento libero dello stato è dato da:

$\boldsymbol{x_l}(k) = \boldsymbol{T_D^{-1}}\, diag\{z_1^k, z_2^k, z_3^k\}\boldsymbol{T_D}\ \boldsymbol{x}(0)$; considerando lo stato iniziale $\boldsymbol{x}(0) = [1 \quad -1 \quad 1]'$ si ottiene:

$$\begin{cases} x_{1l}(k) = (0.4)^k \\ x_{2l}(k) = -(0.4)^k \\ x_{3l}(k) = (0.5)^k \end{cases}$$

3) verificare se il sistema è in forma minima:

la matrice di raggiungibilità è data da :

$\boldsymbol{M_r} = [b \quad Ab \quad A^2b] = \begin{bmatrix} 0 & 1.1 & 3.3 \\ 1 & 1.5 & 3.46 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ rango ($\boldsymbol{M_r}$) = 2 il sistema non è completamente raggiungibile, quindi non è in forma minima.

La matrice di osservabilità è data da :

$\boldsymbol{M_o} = \begin{bmatrix} c \\ Ac \\ A^2c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1.5 & 1.1 & 0.5 \\ 3.46 & 3.3 & 0.25 \end{bmatrix}$ rango ($\boldsymbol{M_o}$) = 3 il sistema è completamente osservabile.

4) determinare gli autovalori della parte raggiungibile e della parte non raggiungibile:

il sistema è già nella forma di decomposizione rispetto alla raggiungibilità; in particolare le matrici $\hat{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{a}}$ e $\hat{\boldsymbol{b}}_{\boldsymbol{a}}$ sono date da:

$\hat{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{a}} = \begin{bmatrix} 1.5 & 1.1 \\ 1.1 & 1.5 \end{bmatrix}$, $\quad \hat{\boldsymbol{b}}_{\boldsymbol{a}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Quindi gli autovalori della parte raggiungibile sono soluzione dell'equazione:

$\det(z\boldsymbol{I} - \hat{\boldsymbol{A}}_a) = 0$, cioè $z_1 = 0.4, \quad z_2 = 2.6,$ mentre l'autovalore della parte non raggiungibile è $z_3 = 0.5$.

5) determinare, se esiste, una sequenza di ingresso che consenta di raggiungere lo stato $\tilde{\boldsymbol{x}} = [3.3 \quad 4.5 \quad 0]'$:

si ottiene come soluzione del sistema:

$$u(1)\boldsymbol{b} + u(0)\boldsymbol{Ab} = \tilde{\boldsymbol{x}}$$

$$u(1)\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u(0)\begin{bmatrix} 1.1 \\ 1.5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.3 \\ 4.5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad u(1) = 0; \quad u(0) = 3.$$

6) dire se il sistema è stabile esternamente:

il sistema non è stabile esternamente. Infatti, gli autovalori della parte completamente raggiungibile e completamente osservabile, che coincidono con i poli del sistema, sono $z_1 = 0.4$, $z_2 = 2.6$; quindi la presenza del polo z_2 rende instabile il sistema.

7) determinare la funzione di trasferimento:

$G(z) = \boldsymbol{c}(z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{b} = \dfrac{1.1}{(z-0.4)(z-2.6)} = \dfrac{1.1}{z^2 - 3z + 1.04}$. Viene confermato quanto detto al punto precedente.

Quesito n.2

1) studiare la stabilità esterna:

la funzione di trasferimento presenta due poli, $p_1 = -1$ e $p_2 = -2$, entrambi reali negativi; quindi il sistema è stabile esternamente.

2) determinare il valore di regime della risposta forzata dell'uscita corrispondente ad un ingresso a scalino unitario applicato al tempo $t = 5$:

non sono presenti zeri o poli nell'origine, e il sistema è stabile, quindi: $y_s(\infty) = G(0) = \text{guadagno statico} = \mu = \dfrac{9}{2} = 4.5$.

3) determinare la risposta all'impulso applicato al tempo $t = 5$:

per determinare la risposta all'impulso applicato al tempo $t = 5$, si fa ricorso alla proprietà di traslazione nel dominio del tempo e si considera lo sviluppo in frazioni parziali della funzione di trasferimento:

$$G(s) = e^{-5s}\left[\frac{9}{(s+1)(s+2)}\right] = e^{-5s}\left[\frac{P_1}{(s+1)} + \frac{P_2}{(s+2)}\right]$$

$$P_1 = [(s+1)G(s)]_{s=-1} = \left[(s+1)\frac{9}{(s+1)(s+2)}\right]_{s=-1} = 9$$

$$P_2 = [(s+2)G(s)]_{s=-2} = \left[(s+2)\frac{9}{(s+1)(s+2)}\right]_{s=-2} = -9$$

Antistrasformando e tenendo sempre conto della proprietà di traslazione nel dominio del tempo si ottiene la risposta all'impulso:

$$g_y(t) = 9\left(e^{-(t-5)} - e^{-2(t-5)}\right)\text{sca}\,(\text{t - 5})$$

4) determinare il campo dei valori di K che rende stabile esternamente il sistema con ingresso W e uscita Y:

$G_r(s) = \dfrac{Y(s)}{W(s)} = \dfrac{KG(s)}{1+KG(s)} = \dfrac{9K}{s^2 + 3s + 2 + 9K}$, $n = 2$ quindi C.N.S. affinché i poli abbiano parte reale negativa e che tutti i coefficienti del polinomio a denominatore siano concordi; allora deve essere:

$$9K + 2 > 0 \;\Rightarrow\; K > -\frac{2}{9}.$$