STABILITÀ

- Proprietà di stabilità (Lyapunov): conseguenze sul movimento dello stato provocate da incertezze sullo stato iniziale, a ingresso e parametri fissi e noti

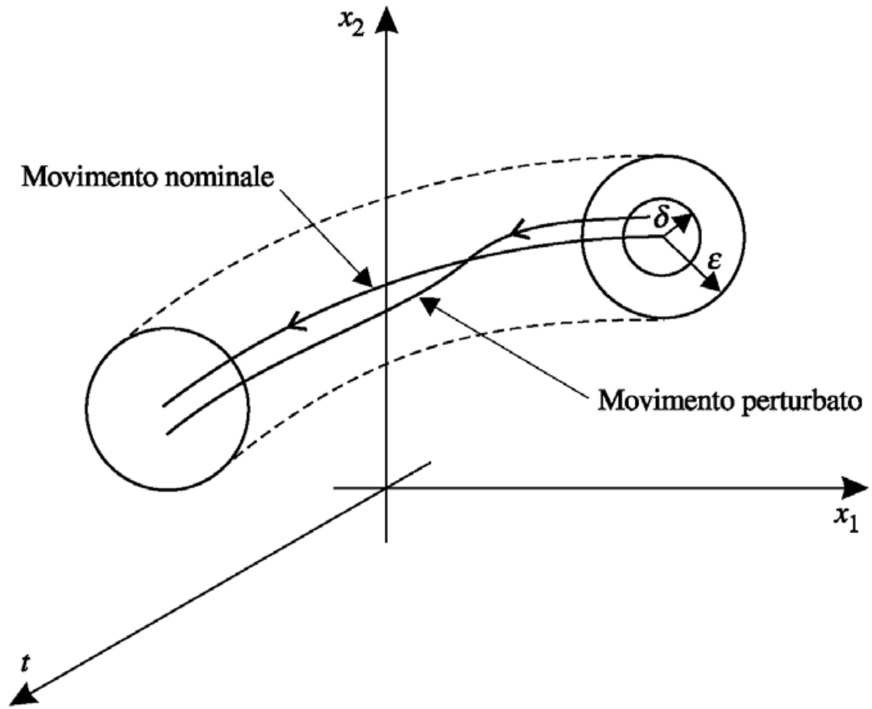
Stabilità del movimento

- Sistema stazionario
  - ⋆ $\tilde{u}(t), t \geq 0, \tilde{x}_0 \Rightarrow \tilde{x}(t)$ (nominale)
  - ⋆ $\tilde{u}(t), t \geq 0, x_0 \Rightarrow x(t)$ (perturbato)

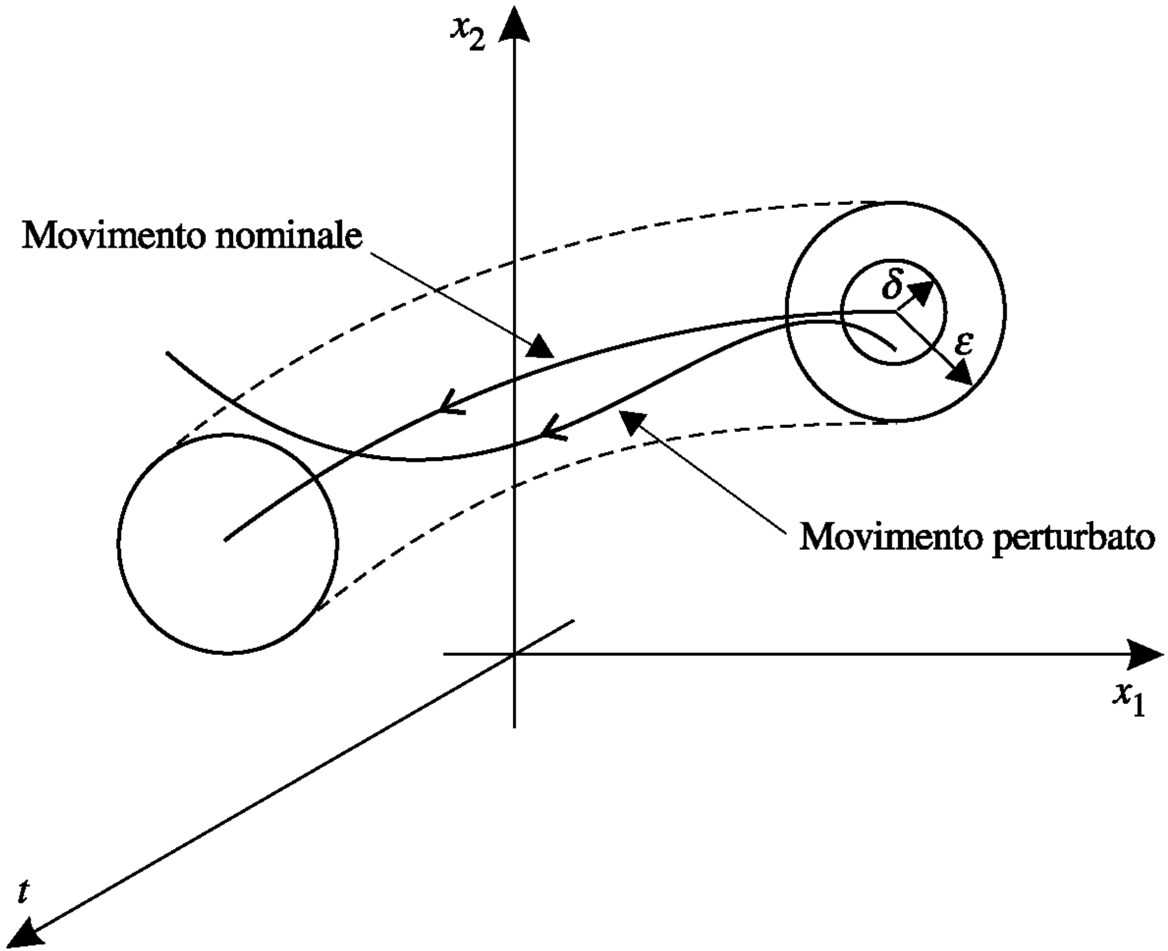
- Movimento $\tilde{x}$ stabile se $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$:

$$\forall x_0 : \|x_0 - \tilde{x}_0\| \leq \delta$$

$$\|x(t) - \tilde{x}(t)\| \leq \epsilon \qquad \forall t \geq 0$$

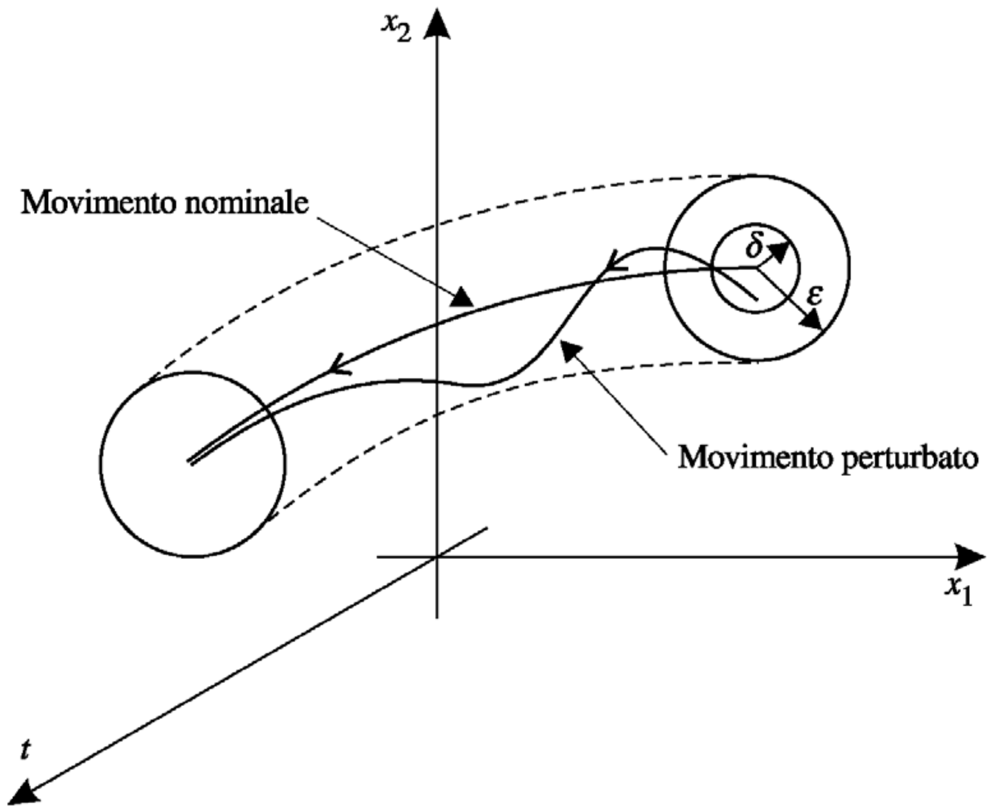


- Movimento instabile



- Movimento asintoticamente stabile

$$\lim_{t\to\infty} \|x(t) - \tilde{x}(t)\| = 0$$



Stabilità dei sistemi lineari e stazionari

- Stabilità di $\tilde{x}(t)$ prodotto da $\tilde{u}(t)$, $t \geq 0$ con $\tilde{x}(0) = \tilde{x}_0$
  - ⋆ principio di sovrapposizione degli effetti: $u'(t) = u''(t) = \tilde{u}(t)$, $x_0' = \tilde{x}_0$, $x_0'' = \tilde{x}_0 + \delta x_0$, $\alpha = -1$, $\beta = 1$

$$\delta \dot{x}(t) = A \delta x(t) \qquad \delta x(0) = \delta x_0$$

  - ⋆ $\tilde{x}$ stabile se $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$: $\forall \delta x_0$

$$\|\delta x_0\| \leq \delta$$

risulti

$$\|\delta x(t)\| \leq \epsilon \qquad t \geq 0$$

altrimenti instabile

- ⋆ asintoticamente stabile se

$$\lim_{t\to\infty} \|\delta x(t)\| = 0$$

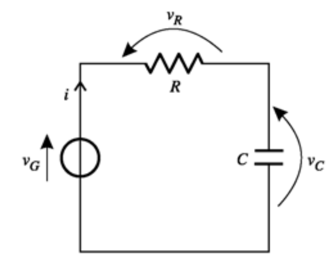
$$\Downarrow$$

- ⋆ proprietà di stabilita del sistema (di tutti i movimenti o stati di equilibrio)

Stabilità e movimento libero

- Sistema stabile *iff* tutti i movimenti liberi dello stato sono limitati; asintoticamente stabile *iff* tutti i movimenti liberi dello stato tendono a zero per $t \to \infty$; instabile se almeno un movimento libero dello stato non è limitato

- Esempio: circuito elettrico



$$x_l(t) = e^{-t/RC}x(0)$$

$\star$ $\forall x(0)$, $x_l(t)$ limitato per $t \geq 0$; si annulla per $t \to \infty$

Stabilità e autovalori

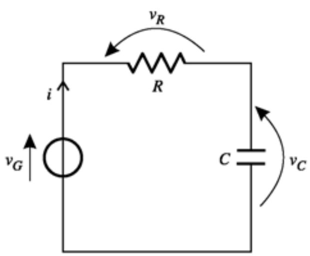
- Sistema asintoticamente stabile *iff* tutti i suoi autovalori hanno parte reale negativa
  - ⋆ semipiano sinistro aperto del piano complesso: regione di asintotica stabilità
- Sistema instabile se almeno uno dei suoi autovalori ha parte reale positiva
- Autovalori a parte reale nulla: sistema stabile o instabile

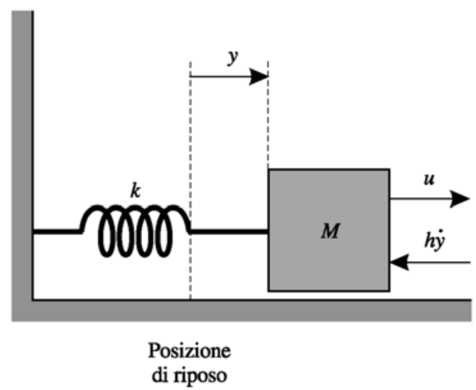
- Esempio: circuito elettrico; $s = -1/RC < 0 \Rightarrow$ asintotica stabilità

- Esempio: sistema massa-molla

  ⋆ $h > 0$ (attrito presente) $\Rightarrow$ asintotica stabilità

  ⋆ $h = 0 \Rightarrow \begin{cases} k \neq 0 & \Rightarrow \quad \text{stabilità} \\ k = 0 & \Rightarrow \quad \text{instabilità} \end{cases}$





Stabilità e polinomio caratteristico

- Calcolo degli autovalori: radici del polinomio caratteristico
  - ⋆ forma più generale del polinomio caratteristico

$$
\begin{aligned}
\varphi(s) &= \varphi_0 s^n + \varphi_1 s^{n-1} + \varphi_2 s^{n-2} + \ldots + \varphi_{n-1} s + \varphi_n \\
&= \varphi_0 \prod_{i=1}^{n} (s - s_i) \qquad \varphi_0 \neq 0
\end{aligned}
$$

$$
\varphi_1/\varphi_0 = -\mathrm{tr}(A) = -\sum_{i=1}^{n} s_i
$$

$$
\varphi_n/\varphi_0 = \det(-A) = (-1)^n \prod_{i=1}^{n} s_i
$$

- Asintotica stabilità

$$\sum_{i=1}^{n} s_i < 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{tr}(A) < 0$$

$$(-1)^n \prod_{i=1}^{n} s_i > 0 \quad \Longrightarrow \quad \det(-A) > 0$$

⋆ condizioni necessarie

$$\varphi_1/\varphi_0 > 0 \qquad \varphi_n/\varphi_0 > 0$$

- $\star$ in generale: φ_i, $i = 0, 1, \ldots, n$ tutti dello stesso segno = condizione necessaria di asintotica stabilità (sufficiente per $n = 1$ e $n = 2$)

- Esempio

  - $\star$ $\varphi(s) = s^3 + 3s^2 - s - 3$: instabile $(-3, -1, +1)$
  - $\star$ $\varphi(s) = s^4 + 5s^2 + 4$: stabile $(\pm \quad j, \pm 2j)$
  - $\star$ $\varphi(s) = s^3 + s^2 + s + 1$: condizione necessaria OK, ma stabile $(- \quad 1, \pm j)$

Proprietà dei sistemi asintoticamente stabili

- Sistemi asintoticamente stabili di maggiore interesse per le applicazioni
  - ⋆ movimento per $t \to \infty$ indipendente dallo stato inziale
  - ⋆ risposta all'impulso (stato/uscita) tende asintoticamente a zero
  - ⋆ risposta ad ingresso limitato tende a zero ($\tilde{t}$: istante in cui l'ingresso diventa definitivamente nullo)

$$x(t) = e^{A(t-\tilde{t})}\tilde{x} \qquad t > \tilde{t}$$

$$y(t) = Ce^{A(t-\tilde{t})}\tilde{x} \qquad t > \tilde{t}$$

Proprietà dei sistemi asintoticamente stabili

$$x(t) = e^{A(t-\tilde{t})}\tilde{x} \qquad t > \tilde{t}$$

$$y(t) = Ce^{A(t-\tilde{t})}\tilde{x} \qquad t > \tilde{t}$$

- $\star$ $u(t) = \bar{u}\mathrm{sca}(t) \Rightarrow$ movimento tende allo stato (uscita) di equilibrio
- $\star$ stabilità interna $\Rightarrow$ stabilità esterna (BIBO) (in generale non vale il viceversa)