

MATRICI

Definizioni e operazioni fondamentali

Autovalori e autovettori

Potenza

Esponenziale

Limiti, derivate e integrali

DEFINIZIONI E OPERAZIONI FONDAMENTALI

Generalità

- Matrice: tabella di numeri o funzioni organizzate in n righe e m colonne

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

- ★ $A = 0$: matrice nulla
- ★ $n = 1$: vettore riga
- ★ $m = 1$: vettore colonna
- ★ $n = m = 1$: scalare

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

- Matrice quadrata ($n = m$)
 - ★ elementi a_{ii} : diagonale
 - ★ $a_{ij} = 0, i < j$: matrice triangolare inferiore
 - ★ $a_{ij} = 0, i > j$: matrice triangolare superiore
 - ★ $a_{ij} = 0, i \neq j$: matrice diagonale, $A = I$ ($a_{ii} = 1$): matrice diagonale

- Partizione in blocchi

$$A_{(n_1+n_2) \times (m_1+m_2)} = \begin{bmatrix} B_{n_1 \times m_1} & C_{n_1 \times m_2} \\ D_{n_2 \times m_1} & E_{n_2 \times m_2} \end{bmatrix}$$

- Matrice quadrata con blocchi (di pari indice) quadrati
 - ★ matrice diagonale a blocchi
 - ★ matrice triangolare a blocchi
 - ★ diagonale dei blocchi
- Matrici uguali: stesse dimensioni ed elementi uguali

Operazioni su una matrice

- Trasposta: $b_{ij} = a_{ji}$

$$B = A'$$

- Complemento algebrico \hat{A}_{ij} di a_{ij} di una matrice quadrata $n \times n$: matrice $(n - 1) \times (n - 1)$ ottenuta eliminando la riga i e la colonna j

Operazioni su una matrice

- Determinante

$$\det(A) = \begin{cases} a_{11} \\ \sum_{i=1}^n a_{ij}(-1)^{i+j} \det(\hat{A}_{ij}) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(-1)^{i+j} \det(\hat{A}_{ij}) \end{cases}$$

★ $n = 2$

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

★ $n = 3$

$$\begin{aligned} \det(A) = & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21} \\ & - a_{31}a_{13}a_{22} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{12}a_{21}a_{33} \end{aligned}$$

- ★ matrice triangolare a blocchi con blocchi quadrati sulla diagonale: prodotto dei determinanti dei blocchi

Operazioni su una matrice

- Matrice aggiunta di una matrice quadrata

$$\text{adj}(A) = [(-1)^{i+j} \det(\hat{A}_{ij})]'_{\substack{i = 1, \dots, n \\ j = 1, \dots, n}}$$

Operazioni su una matrice

- Matrice non singolare (invertibile)

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A)$$

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

★ $n = 2$

$$A^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

★ $A = \text{diag}\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$

$$A^{-1} = \text{diag}\left\{\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots, \frac{1}{a_n}\right\}$$

Operazioni su una matrice

- Prodotto di uno scalare α per una matrice A : αA (moltiplicando tutti gli elementi di A per α)

★ matrice quadrata

$$\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$$

- Minore: determinante del blocco quadrato estratto
- Rango $\rho(A)$ di una matrice $n \times m$: massimo intero per cui esiste un minore diverso da zero

$$0 \leq \rho(A) \leq \min\{n, m\}$$

★ matrice di rango massimo: $\rho(A) = \min\{n, m\}$, $n = m \Rightarrow \det(A) \neq 0$

- k righe (colonne) A_i linearmente indipendenti:

$$\sum_{i=1}^k \gamma_i A_i \neq 0 \quad \forall \gamma_i \neq 0$$

★ max numero di righe (colonne) linearmente indipendenti =
rango

- Traccia

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

$$\text{tr}(A') = \text{tr}(A)$$

$$\text{tr}(\alpha A) = \alpha \text{tr}(A)$$

- Norma di un vettore ($w \in R^n$)

$$\|w\| = (w_1^2 + w_2^2 + \dots + w_n^2)^{1/2}$$

Operazioni tra matrici

- Somma

$$C = A + B \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

$$A + 0 = A$$

- Prodotto

$$C_{n \times q} = A_{n \times m} B_{m \times q} \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kj}$$

Operazioni tra matrici

- Prodotto

- ★ $AB \neq BA!$

- ★ $AI_m = I_n A = A$

- ★ $n = m: AA^{-1} = A^{-1}A = I$

- ★ A, B quadrate: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Operazioni tra matrici

- Potenza ($k \in \mathbb{N}$)

$$A^k = AA \dots A$$

$$A^{-k} = (A^k)^{-1} = (A^{-1})^k \quad A^0 = I$$

★ A diagonale

$$A^k = \text{diag} \{a_1^k, a_2^k, \dots, a_n^k\}$$

Operazioni tra matrici

- Proprietà

- ★ $A_{n \times m}, B_{m \times n}$

$$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA) \quad \det(AB) = \det(BA)$$

- ★ A, B quadrate

$$\operatorname{tr}(A+B) = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B) \quad \det(AB) = \det(A)\det(B)$$

AUTOVALORI E AUTOVETTORI

Generalità

- Polinomio caratteristico: $A_{n \times n}$, $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\varphi(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \alpha_2 \lambda^{n-2} + \dots + \alpha_{n-1} \lambda + \alpha_n$$

- ★ equazione caratteristica ($\alpha_i \in \mathbb{R}$)

$$\varphi(\lambda) = 0$$

soluzioni: autovalori di A (reali o complessi coniugati a coppie)

$$\det(A) = \prod_{i=1}^n \lambda_i \quad \text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$$

- ★ matrice diagonale (triangolare) a blocchi: autovalori dei blocchi sulla diagonale

- Trasformazione di similitudine: T non singolare

$$\begin{aligned}\det(\lambda I - TAT^{-1}) &= \det(T\lambda T^{-1} - TAT^{-1}) \\ &= \det(T)\det(\lambda I - A)\det(T^{-1}) \\ &= \det(\lambda I - A)\end{aligned}$$

★ teorema di Cayley-Hamilton

$$\varphi(A) = A^n + \alpha_1 A^{n-1} + \alpha_2 A^{n-2} + \dots + \alpha_{n-1} A + \alpha_n I = 0$$

- Autovettore $v_i \neq 0$:

$$(\lambda_i I - A)v_i = 0$$

Forma diagonale

- $\lambda_i(A)$ distinti

$$A [v_1 \quad v_2 \quad \dots \quad v_n] = [v_1 \quad v_2 \quad \dots \quad v_n] \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$$

★ matrice degli autovettori non singolare

$$T_D^{-1} = [v_1 \quad v_2 \quad \dots \quad v_n]$$

⇓

$$A_D = T_D A T_D^{-1} = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$$

POTENZA

- $A_{n \times n}, k \in N$

$$\begin{aligned}\Phi(k) &= A^k \\ &= (T_D^{-1} A_D T_D)^k = T_D^{-1} A_D^k T_D \\ &= T_D^{-1} \Phi_D(k) T_D\end{aligned}$$

★ $\Phi(k)$ diagonalizzata per similitudine

$$\begin{aligned}\Phi_D(k) &= T_D \Phi(k) T_D^{-1} \\ &= \text{diag} \{ \lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots, \lambda_n^k \}\end{aligned}$$

$$\varphi_{\alpha\beta}(k) = \sum_{i=1}^n r_{\alpha\beta i} \lambda_i^k$$

ESPONENZIALE

- $A_{n \times n}, t \geq 0$

$$\begin{aligned}\Psi(t) &= e^{At} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} (At)^i = I_n + At + \frac{(At)^2}{2!} + \dots \\ &= T_D^{-1} \text{diag} \Psi_D(t) T_D\end{aligned}$$

★ $\Psi(t)$ diagonalizzata per similitudine

$$\begin{aligned}\Psi_D(t) &= T_D \Psi(t) T_D^{-1} \\ &= \{e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_n t}\}\end{aligned}$$

$$\psi_{\alpha\beta}(k) = \sum_{i=1}^n p_{\alpha\beta i} e^{\lambda_i t}$$