

SEGNALI A TEMPO CONTINUO

Trasformata di Laplace

Generalità

- Funzione complessa f di variabile reale t , $s = \sigma + j\omega$:

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

- ★ $\exists s$: convergenza integrale $\Rightarrow \bar{\sigma}$: ascissa di convergenza
($F(s)$ esiste nel semipiano $\text{Re}(s) > \bar{\sigma}$)

- Trasformata razionale

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

★ radici di $N(s) = 0$: zeri

★ radici di $D(s) = 0$: poli (f reale: $\bar{\sigma} = \max(\text{Re}(s))$)

- Formula di antitrasformazione ($\sigma > \bar{\sigma}$)

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st} ds$$

★ $f(t) = 0, t < 0 \Rightarrow$ corrispondenza biunivoca

- Trasformata dell'impulso

$$\mathcal{L}[\text{imp}(t)] = \int_{0-}^{+\infty} \text{imp}(t) e^{-st} dt = e^{-s0} = 1$$

- Trasformata dello scalino ($\bar{\sigma} = 0$)

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[\text{sca}(t)] &= \int_0^{+\infty} \text{sca}(t) e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} e^{-st} dt \\
 &= \left. \frac{e^{-st}}{-s} \right|_0^{+\infty} = \left[\frac{e^{-\sigma t}}{-(\sigma + j\omega)} (\cos(\omega t) - j \sin(\omega t)) \right] \bigg|_0^{+\infty} \\
 &= \frac{0 - 1}{-(\sigma + j\omega)} = \frac{1}{s}
 \end{aligned}$$

Proprietà principali

- Linearità

$$\mathcal{L}[\alpha f(t) + \beta g(t)] = \alpha F(s) + \beta G(s)$$

- Traslazione nel dominio del tempo

$$\mathcal{L} [\hat{f}(t)] = \mathcal{L}[f(t - \tau)] = e^{-\tau s} F(s)$$

$$\star f(t) = \alpha \text{sca}(t - \tau_1) + \beta \text{sca}(t - \tau_2)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f(t)] &= \mathcal{L}[\alpha \text{sca}(t - \tau_1)] + \mathcal{L}[\beta \text{sca}(t - \tau_2)] \\ &= \alpha \mathcal{L}[\text{sca}(t - \tau_1)] + \beta \mathcal{L}[\text{sca}(t - \tau_2)] \\ &= \alpha \frac{e^{-\tau_1 s}}{s} + \beta \frac{e^{-\tau_2 s}}{s}\end{aligned}$$

- Traslazione nel dominio della variabile complessa

$$\mathcal{L} [\hat{f}(t)] = \mathcal{L}[e^{\alpha t} f(t)] = F(s - \alpha)$$

★ trasformata dell'esponenziale ($\bar{\sigma} = \alpha$)

$$\mathcal{L} [e^{\alpha t} \text{sca}(t)] = \frac{1}{s - \alpha}$$

- Derivazione nel dominio del tempo

$$\mathcal{L} [\dot{f}(t)] = sF(s) - f(0^-)$$

★ derivate successive (s operatore di derivazione)

$$\mathcal{L} [\ddot{f}(t)] = s^2 F(s) - sf(0) - \dot{f}(0)$$

$$\vdots = \vdots$$

$$\mathcal{L} \left[\frac{d^n f(t)}{dt^n} \right] = s^n F(s) - \sum_{i=1}^n s^{n-i} \left. \frac{d^{i-1} f(t)}{dt^{i-1}} \right|_{t=0}$$

- Derivazione nel dominio della variabile complessa

$$\mathcal{L}[tf(t)] = -\frac{dF(s)}{ds}$$

★ trasformata della rampa

$$\mathcal{L}[\text{ram}(t)] = -\frac{d\left(\frac{1}{s}\right)}{ds} = \frac{1}{s^2}$$

- Integrazione nel dominio del tempo ($1/s$ operatore di integrazione)

$$\mathcal{L} \left[\int_0^t f(\tau) d\tau \right] = \frac{1}{s} F(s)$$

★ trasformata della parabola

$$\mathcal{L}[\text{par}(t)] = \frac{1}{s} \mathcal{L}[\text{ram}(t)] = \frac{1}{s^3}$$

- Convoluzione nel dominio del tempo

- ★ prodotto di convoluzione

$$\begin{aligned} f_1(t) \star f_2(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t - \eta) f_2(\eta) d\eta \\ &= \int_0^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau = \int_0^{+\infty} f_1(t - \eta) f_2(\eta) d\eta \end{aligned}$$

$\Downarrow$

$$\mathcal{L}[f_1(t) \star f_2(t)] = F_1(s)F_2(s)$$

- ★ $f_1(t) = e^{\alpha t} \text{sca}(t)$, $f_2(t) = \text{sca}(t)$

$$\mathcal{L}[f_1(t) \star f_2(t)] = \frac{1}{s(s - \alpha)}$$

- Teorema del valore iniziale (f ha trasformata razionale F con grado del denominatore maggiore del grado del numeratore)

$$f(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$$

- Teorema del valore finale (f ha trasformata razionale F con grado del denominatore maggiore del grado del numeratore e poli nulli o con parte reale negativa)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

$$\star f(t) = e^{\alpha t} \text{sca}(t)$$

$$\left[e^{\alpha t} \text{sca}(t) \right] \Big|_{t=0+} = \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{1}{s - \alpha} = 1$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\alpha t} \text{sca}(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s - \alpha} = \begin{cases} 0 & \alpha < 0 \\ 1 & \alpha = 0 \end{cases}$$

- Tabella di trasformate

$f(t)$	$F(s)$
$\text{imp}(t)$	1
$\text{sca}(t)$	$\frac{1}{s}$
$\text{ram}(t)$	$\frac{1}{s^2}$
$\text{par}(t)$	$\frac{1}{s^3}$
$e^{\alpha t} \text{sca}(t)$	$\frac{1}{s - \alpha}$
$te^{\alpha t} \text{sca}(t)$	$\frac{1}{(s - \alpha)^2}$
$\sin(\omega t) \text{sca}(t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cos(\omega t) \text{sca}(t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$t \sin(\omega t) \text{sca}(t)$	$\frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}$
$t \cos(\omega t) \text{sca}(t)$	$\frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$
$e^{\sigma t} \sin(\omega t) \text{sca}(t)$	$\frac{\omega}{(s - \sigma)^2 + \omega^2}$
$e^{\sigma t} \cos(\omega t) \text{sca}(t)$	$\frac{s - \sigma}{(s - \sigma)^2 + \omega^2}$
$te^{\sigma t} \sin(\omega t) \text{sca}(t)$	$\frac{2\omega(s - \sigma)}{[(s - \sigma)^2 + \omega^2]^2}$
$te^{\sigma t} \cos(\omega t) \text{sca}(t)$	$\frac{(s - \sigma)^2 - \omega^2}{[(s - \sigma)^2 + \omega^2]^2}$

Sviluppo di Heaviside

- Antitrasformazione di funzione razionale

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

- ★ grado di $D(s)$ maggiore del grado di $N(s)$
- ★ $N(s)$ e $D(s)$ a coefficienti reali

- Poli distinti

$$D(s) = \prod_{i=1}^n (s + p_i) \quad p_h \neq p_j, h \neq j$$

$$\frac{N(s)}{\prod_{i=1}^n (s + p_i)} \equiv \sum_{i=1}^n \frac{P_i}{s + p_i}$$

★ calcolo dei residui

$$P_i = \frac{N(-p_i)}{\prod_{j=1, j \neq i}^n (p_j - p_i)} = \frac{N(-p_i)}{\left. \frac{dD(s)}{ds} \right|_{s=-p_i}} = [(s + p_i)F(s)]|_{s=-p_i}$$

$\Downarrow$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1} \left[\sum_{i=1}^n \frac{P_i}{s + p_i} \right] = \left(\sum_{i=1}^n P_i e^{-p_i t} \right) \text{sca}(t)$$

- Esempio

$$F(s) = \frac{s - 10}{(s + 2)(s + 5)}$$

$$\frac{s - 10}{(s + 2)(s + 5)} \equiv \frac{P_1}{s + 2} + \frac{P_2}{s + 5}$$

$$P_1 = \frac{-2 - 10}{-2 + 5} = -4 \quad P_2 = \frac{-5 - 10}{-5 + 2} = 5$$

$\Downarrow$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s - 10}{(s + 2)(s + 5)} \right] = (-4e^{-2t} + 5e^{-5t}) \text{ sca}(t)$$

- Poli complessi coniugati ($p_j = \bar{p}_i$)

$$\frac{P_i}{s + p_i} + \frac{P_j}{s + p_j} = \frac{P_i}{s + p_i} + \frac{\bar{P}_i}{s + \bar{p}_i}$$

$\Downarrow$

$$\begin{aligned} P_i e^{-p_i t} + P_j e^{-p_j t} &= P_i e^{-p_i t} + \bar{P}_i e^{-\bar{p}_i t} \\ &= 2|P_i| e^{\operatorname{Re}(-p_i)t} \cos(\operatorname{Im}(-p_i)t + \arg P_i) \end{aligned}$$

★ in alternativa: identità dei polinomi

- Esempio

$$F(s) = \frac{100}{(s+1)(s^2+4s+13)}$$

$$P_1 = \frac{100}{(2-j3-1)(2+j3-1)} = 10$$

$$P_2 = \frac{100}{(1-2+j3)(2+j3-2+j3)} = -\frac{5}{3}(3-j)$$

$\Downarrow$

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{100}{(s+1)(s^2+4s+13)} \right] \\ &= 10 \left[e^{-t} + \frac{\sqrt{10}}{3} e^{-2t} \cos(3t + \arg(j-3)) \right] \text{sca}(t) \end{aligned}$$

- Poli multipli

$$D(s) = \prod_{i=1}^{\mu} (s + p_i)^{n_i} \quad p_h \neq p_j, h \neq j$$

$$\frac{N(s)}{\prod_{i=1}^{\mu} (s + p_i)^{n_i}} \equiv \sum_{i=1}^{\mu} \sum_{h=1}^{n_i} \frac{P_{i,h}}{(s + p_i)^h}$$

- Poli multipli
 - ★ calcolo dei residui

$$P_{i,h} = \frac{1}{(n_i - h)!} \left. \frac{d^{n_i-h} [(s + p_i)^{n_i} F(s)]}{ds^{n_i-h}} \right|_{s=-p_i}$$

$\Downarrow$

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1} \left[\sum_{i=1}^{\mu} \sum_{h=1}^{n_i} \frac{P_{i,h}}{(s + p_i)^h} \right] \\ &= \left(\sum_{i=1}^{\mu} \sum_{h=1}^{n_i} P_{i,h} \frac{t^{h-1} e^{-p_i t}}{(h-1)!} \right) \text{sca}(t) \end{aligned}$$

- Esempio

$$F(s) = \frac{s + 18}{s(s + 3)^2}$$

$$\frac{s + 18}{s(s + 3)^2} \equiv \frac{P_{1,1}}{s} + \frac{P_{2,1}}{s + 3} + \frac{P_{2,2}}{(s + 3)^2}$$

$$P_{1,1} = [sF(s)]|_{s=0} = \left. \frac{s + 18}{(s + 3)^2} \right|_{s=0} = 2$$

$$P_{2,1} = \left. \frac{d[(s + 3)^2 F(s)]}{ds} \right|_{s=-3} = -2$$

$$P_{2,2} = [(s + 3)^2 F(s)]|_{s=-3} = -5$$

$\Downarrow$

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s + 18}{s(s + 3)^2} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{2}{s} - \frac{2}{s + 3} - \frac{5}{(s + 3)^2} \right] \\ &= (2 - 2e^{-3t} - 5te^{-3t}) \operatorname{sca}(t) \end{aligned}$$